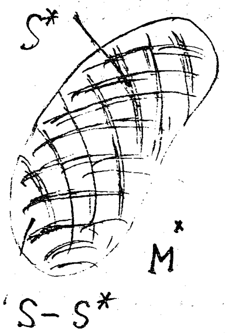
数理解析研究所講究録
38巻 1968年 109-116

方程式 $\Delta u + k^2 u = 0$ の解について の若干の考察

日大理工　洪 姫 媛

滑らかな境界Sでかこまれた3次元の領域をDとする。



境界Sを２つの部分 S^* と $(S-S^*)$ に分け，S^* を壁 $S-S^*$ を窓とよぶことにする。　Dの外に一点をとりそれをMとする。

与えられたHelmholtzの方程式を

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

とする。つぎのような函数 $U(P)$ を考察する：

S^* 上では $U=0$，S^* 及び M 以外の有限な所にあるすべての点Pにおいては与えられたHelmholtzの方程式を満足する。　Mでは指定された形の特異点をもつ。（例えば，$U \sim \frac{e^{ikr}}{r}$，$r=\overline{PM}$），また∞では U が唯一解になるような条件が与えられているとする。（例えば，Sommerfeldの輻射条件の類，$\lim_{R\to\infty} R(\partial U/\partial R - ikR)=0$）。

考察を試みたい目的のことがらは，上にのべた諸条件を満足するUがどういう条件の下にD内の任意の点Pにおいて $U(P) \fallingdotseq 0$ となるか？　ということである。

（すなわち，どういう条件の下でDの内部で外部の点Mでのじょう乱の影響を殆んど受けないかという，いわば，Helmholtz方程式に対するしゃ断現象のメカニズムを調べることである。）

$k=0$ のときについて上の問題，（電気的しゃ断現象），を1つの考え方で処理したものを福原南雲記念号に出させて頂いた。

（それは壁の集合 S^* が境界 S 全体に十分に密に配布されていれば，壁の総面積が窓の総面積に比してどんなに小さくても，Dの内部で外のじょう乱の影響を殆んど受けないということを2次元の円の場合の問題にして推論を与え，又，数値解析的興味の見地から，計算機にこの結果をcheckさせる1つのテクニックを与え，その方法によって実際にえたdataをそえたものである。）

まず，考えられる1つの立場として，$k=0$ の場合と同じ様な考え方を $k\neq 0$ の場合へ適用してみることである。そうすると $k=0$ での証明中，調和函数の最大値の原理を使った部分が適用できなくなる。第一にこれをきり抜けなければならない，もし上の方針で進むならば。そのために，$k\neq 0$ の場合，この方程式に対する固定境界値問題の第1固有値に関する等周問題の結果を考慮に入れて，調和函数の最大値の原理の拡張に相当するものをみちびき，それを使って $k=0$ の

場合と殆んど類似の推論でいけるという推察の下に，Dについてつぎの条件をつけて考察を試みることにした：

Dの体積は，与えられたk^2を同じ方程式の固定境界値問題の第1固有値とする球の体積より小さいと假定する。

すると以下に示すように$k=0$の場合と類似の推論にみちびかれることを示すのが本報告の主な目的の1つである。

補題： $\Delta u + k^2 u = 0 \qquad (k \neq 0) \qquad (1)$

を与えられた方程式とする。Dは体積について上の假定を満足する，滑らかな境界Sでかこまれた3次元の単連結の領域とし，PはD内の任意の点，QはS上の任意の点をあらわすならば，$|u(P)| \leq c \sup_{Q \in S} |u(Q)|$ が成立する。

ここにcはDだけに従属し，Pには独立な定数である。

（Dが単連結でないときは，一番外の境界でかこまれた領域の体積について上の假定を満足するとすれば，単連結の場合と同じ推論で同じ結果がえられるので証明は単連結について示せば十分である。実は次元も3次元に限った事ではない）

証明：（3次元の単連結の場合）

Gを方程式(1)のGreen函数とする。

Dの大きさに対する假定からGreen函数Gの符号はD内で常に正である。もし符号がかわるとすれば，$G<0$ と

$G>0$ の領域に分れる。$G<0$ なる1つの単連結領域が少くとも1つ存在する。それをD^*とすると明らかにD^*にはGのpoleはない。よって

$$\begin{cases} \Delta G + k^2 G = 0 & \text{in } D^* \\ G = 0 & \text{on the boundary of } D^* \end{cases}$$

が成立するからk^2は領域D^*に対する固有境界値問題の1つの固有値になる。これは矛盾である。というのはD^*に対する同じ問題の第1固有値はD^*と同じ体積の球に対する第1固有値より小でない。Dの体積についての仮定により後者はk^2より大であるから。

従って$\partial G/\partial n$ の符号はS上で同符号でなければならない。

よく知られているようにGreenの公式から，$P \in D$のとき

$$u(P) = \frac{1}{4\pi}\int_S u(Q)\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma$$

とかけるが上のことから

$$u(P) = \frac{1}{4\pi}(u\text{の}S\text{上での中間値}) \times \int_S \frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma$$

とかき直せる。ところが$\int_S \frac{\partial G}{\partial n}d\sigma$ は境界値1なる(1)の方程式の解のPにおける値である。これはDだけに従属し，Pには独立な定数Cで上方からおさえられる。よってuのDの内点における値の評価をuの境界S上での値を使って与え

る不等関係：

$$|u(P)| \leqq C \sup_{Q \in S} |u(Q)| \qquad (P \in D)$$

を得る。

さて，ここで1頁においてかかげた問題の函数 $U(P)$ に戻る。（但し，Dの体積は上でのべた假定をみたすとする。）

$$e^{ikr}/r \equiv \varphi(P)$$

とおく。Uを求める代りにつぎのuを求めることにする：

uはS^*以外では $\Delta u + k^2 u = 0$ をみたす。

S^*上では $u = -\varphi$，∞では輻射条件 $\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial u}{\partial R} - iku\right) = 0$

をみたす。uが求まればUは

$$U(P) = u(P) + \varphi(P) \quad \text{である。}$$

このような問題の解がえられたときそれを$u(P)$とする。つぎにDをかこんでこれより少し大きい領域D_1を作り，その境界をS_1とする。（D_1も体積についてDと同じ条件をみたすとする。）S_1上では$u(P)$は有限確定値をもつ。このS_1上の$u(P)$の値を$u(Q_1)$とおく。（S_1上の点をQ_1であらわした。）D_1内で考えると$u(P)$はS_1上で$u(Q_1)$，S^*上で$u = -\varphi(Q)$となる $\Delta u + k^2 u = 0$ の解である。これを問題Iとしておく。

つぎにS_1上で$u(Q_1)$，S上で$-\varphi(Q)$となる $\Delta v + k^2 v = 0$ の解を考える。これを問題IIとしておく。

問題IIの解 v につき S 及び S_1 上で $\partial v/\partial n$ を作る。この $\frac{\partial v}{\partial n}$ を用い $-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial v}{\partial n}$ を密度とする一重層 $\sigma(Q)$ を S 及び S_1 上に配布する。（Q で S 上の点をあらわした。）

この一重層 σ にもとずくポテンシャルを新に v で表わすとこれは S と S_1 との間で問題IIの v と一致する。S の内側 D では S 上で $v(Q)=-\varphi(Q)$，これをかきかえると S 上で $v(Q)+\varphi(Q)=0$ である。$v(P)+\varphi(P)$ は D で

$$\Delta[v+\varphi]+k^2[v+\varphi]=0$$

を満足する。D の大きさに対する假定から，D 内で zero 境界値問題の non-trivial solution がないから $v(P)+\varphi(P)\equiv 0$ となる。$\therefore v(P)=-\varphi(P)$，すなわち，一重層ポテンシャルは S の内側では $-\varphi(P)$ を与える。問題IIで S 上に配布した一重層を S^* 上に再配分する。すなわち窓のところ $(S-S^*)$ では 0 にしてしまい，そこにあった一重層をすぐ近隣の壁へ移動させる。も少し詳しくいうと考えている面 S の上に網の目を作る。1つの網の目の中でのそこに配布されている一重層の質量の total が変らないように移動させることである，（S_1 上ではもとのまま）。網の目を細かくする操作はその直径を小さくすることである。このように再配布された一重層を $\sigma^*(Q)$ とする。

$\sigma^*(Q)$ にもとずくポテンシャル $W(P)$ は $\sigma(Q)$ にもとずく

ポテンシャルの Riemann 積分式近似を与え，S^* が S 上に十分に密に配布されていれば P につき一様に

$$|W(P)-V(P)|<\varepsilon \qquad (a)$$

特に D_1 の境界 S_1 上においても

$$|W(Q_1)-V(Q_1)|<\varepsilon \qquad (b)$$

また S^* 上においても

$$|W(Q)-V(Q)|<\varepsilon \qquad (c)$$ である。

ところで (b)，(c) において

S_1 上では $V(Q_1)=U(Q_1)$

S 上では $V(Q)=U(Q)=-\varphi(Q)$ であった。

そこで W と U とを境界 S_1，S^* の上で比較をやると

S_1 上では $|W(Q_1)-U(Q_1)|<\varepsilon$

S^* 上では $|W(Q)-U(Q)|<\varepsilon$ となる。

W と U との差を作ると，その差について，$W(P)-U(P)$ も D_1-S^* で

$$\Delta(W-U)+k^2(W-U)=0$$

を満足し，かつ境界値は ε より小である。そこで D_1-S^* の体積に関する仮定から D_1-S^* の内部では

$$|W(P)-U(P)|<c\varepsilon \qquad (c\text{はある定数})$$

となる。一方 (a) から

$|W(P)-V(P)|<\varepsilon$ だったので両者をあわせ

$$|u(p) - v(p)| < (1+c)\varepsilon$$

ところで $v(p)$ については D内で $-\varphi(p)$ であった。

故に D内で

$$|u(p) + \varphi(p)| < (1+c)\varepsilon$$ となる。

$u(p)+\varphi(p)$ は，はじめの求めるもの $U(p)$ であり，D内における評価

$$|U(p)| < \varepsilon$$

がえられ，結局，Dの体積についての上の仮定の下に $c=0$ の場合と類似の結果がえられる。